

## はりやアーチ構造部材の衝撃弾性応答に関する補遺

下山田 邦 夫\*

### A Consideration on Transient Elastic Response of Beam and Arch Members to Known-Impact Load

By Kunio Shimoyamada\*

**Synopsis:** The properties of the beam finite element, which are mass, elastic and geometrical stiffness matrices, are derived in consideration of rotational inertia and shear deformation. In particular, the geometrical stiffness matrix in considering the shear deformation is derived in the each of the above properties.

Numerical examples of the transient elastic response of the beam member subjected to known-impact load are represented in this report.

**要旨:** 本報告では、回転慣性とせん断変形を考慮したはりの質量特性、剛さ特性と幾何学的剛さ特性を導いている。特にせん断変形を考慮したときの幾何学的剛さ特性を導いている。

各特性を応用して、既知の衝撃荷重を受けるはり構造部材の衝撃弾性応答の計算例を示してある。

#### 1. はじめに

はりやアーチ構造部材のような基本的な構造要素については、古くから多くの研究者によってさまざまな解法が試みられてきた。その力学的挙動を研究することは工学上重要である。従来の研究のうち、奥村ら<sup>1)</sup> ははり要素を使い伝達マトリクス法によりシェル構造物の定常振動問題の解析に成功している。このことは、はり要素は板やシェル構造物への理想化も可能な基本構造要素であることを示している。それゆえ、その要素特性を陽な形で明らかにしておく必要があると思料できる。

有限要素系のはり要素に関する剛さ特性については、山田ら<sup>2)</sup> によってアーチ曲線解析も含めて厳密に研究されている。Przemieniecki<sup>3)</sup> はせん断変形を考慮したときの剛さ特性を直接剛性法により導いている。また同変形を考慮したときの動的問題については Sheinman<sup>4)</sup> により解析が試みられている。さらに回転慣性を含めた質量特性と剛さ特性は Archer<sup>5)</sup> によって導かれている。また集中質点系に理想化したときの質量特性と剛さ特性については Busse<sup>6)</sup> らによって導かれ、伝達マトリクス法に活用されている。

しかしながら、幾何学的非線形問題（座屈解析、大変形問題）を解析する場合に必要な幾何学的剛さ特性については、せん断変形を考慮した形では導かれていない。したがって、短柱や集中マスが付加されているはりのような問題を解析する場合に厳密さを欠くと思われる。

そこで本報告では、前述の問題点を補足するために、せん断変形と回転慣性を考慮した質量特性、剛さ特性と幾何学的剛さ特性を陽な形で導き、今後の研究の一助にする。

上述の各特性を応用して、はりが既知の衝撃荷重を受けるときの弾性応答の解析例を示す。なお運動方程式の逐次積分は Newmark の  $\beta$  法<sup>7)</sup> を用いる。

#### 2. 解析法

第1章で述べた各特性を有限要素法の応用により導く。各特性の誘導あたって、ひずみの仮定は Karman<sup>8)</sup> の有限変形理論を応用する。有限変形問題では要素は弾性変形をするとともに剛体運動も生ずる。それらを分離した形状関数を考え、その関数にせん断変形を考慮するための因子（せん断係数）を加えて表す。

材料は Kirchhoff の仮定が成立するものとし、続いて本解析で用いた運動方程式の逐次時間積分法について説明する。

\* 機械工学科 専任講師  
Lecturer, Mechanical Engineering Division

## 2.1 場の仮定

はじめに、Fig. 1 に示すようなある境界と体積  $V$  を有し、その境界内で連続である領域を考える。その領域は変位ベクトル  $\vec{u}$ 、ひずみベクトル  $\vec{\varepsilon}$  と応力ベクトル  $\vec{\sigma}$  で表すことができると仮定する。またその領域は節点  $P$  を介して結合されているものとする。

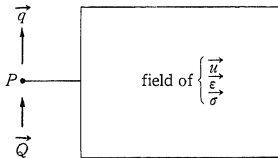


Fig. 1 変位、ひずみと応力場の要素

Fig. 1 において、 $\vec{q}$  は節点変位ベクトルであり、 $\vec{Q}$  は節点力ベクトルを表す。

## 2.2 はり要素

本報告で使用するはり要素を Fig. 2 に示す。はりの断面形は少なくとも軸対称形であるとして、図心軸と  $x$  軸を一致させて座標系  $o-xy$  平面上で考える。

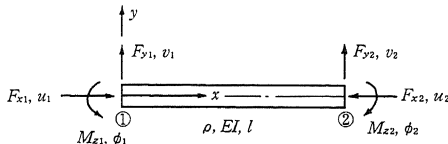


Fig. 2 はりの有限要素

はり要素と前述した各場の仮定の対応はつぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} \vec{u} &= \{u, v, \phi\}^T, \\ \vec{q} &= \{u_1, v_1, \phi_1, u_2, v_2, \phi_2\}^T, \\ \vec{Q} &= \{F_{x1}, F_{y1}, M_{x1}, F_{x2}, F_{y2}, M_{x2}\}^T. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

(1)式の添字  $T$  は転置を表す。

## 2.3 ひずみ増分の定義

大変形を考慮して Karman の方程式を応用する。その成分はつぎのように表すことができる。

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 - y \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right). \quad (2)$$

(2)式を後の解析の簡単化のために、線形のひずみ項と非線形のひずみ項を各々別個に表現しておく。

$$\vec{\varepsilon} = \vec{\varepsilon}_L + \vec{\varepsilon}_N. \quad (2')$$

(2')式が時間  $t$  におけるひずみを表すとすれば、微小時間  $\Delta t$  後のひずみは  $\Delta \vec{\varepsilon}$  だけ変化すると仮定する。時間  $\Delta t$  間のひずみ増分  $\Delta \vec{\varepsilon}$  を  $\Delta t$  の間で線形化して求め

ると、つぎのように表すことができる。

$$\begin{aligned} \Delta \vec{\varepsilon} &= \vec{\varepsilon}_{t+\Delta t} - \vec{\varepsilon}_t \\ &= \Delta \vec{\varepsilon}_L + \Delta \vec{\varepsilon}_N. \end{aligned}$$

これは、各変形増分を  $\Delta u$ ,  $\Delta v$  と  $\Delta \phi$  としたときの Karman の方程式を適用した形に一致する。

## 2.4 変位場の仮定

さて、前述したひずみ増分は適当な変位関数を用いることにより、変位増分  $\Delta \vec{u}$  と結合することができるとし、その変位場はつぎのように近似できるとする。[付録 A・1]

$$\Delta \vec{u} = [A] \vec{\alpha}. \quad (3)$$

ここに、 $\vec{\alpha}$  は未知数のベクトルである。

節点変位増分  $\Delta \vec{q}$  と材料内の任意の点の変位増分  $\Delta \vec{u}$  は節点を介して結合されているので、つぎのような関係が成立しなければならない。

$$\Delta \vec{q} = [B] \vec{\alpha} \text{ or } \vec{\alpha} = [B^{-1}] \Delta \vec{q}.$$

$[B]$  は一般に境界条件より一様に決定できる。[付録 A・2] それゆえ、(3)式はつぎのように表すことができる。

$$\Delta \vec{u} = [A][B^{-1}] \Delta \vec{q} = [a] \Delta \vec{q}. \quad (4)$$

ここに、 $[a]$  は一般に形状関数といわれる量である。本報告では、(4)式で求まる形状関数にせん断変形を考慮するための係数を加えた関数を使用する。[付録 A・3]

## 2.5 幾何学的関係

変位増分  $\Delta \vec{u}$  とひずみ増分  $\Delta \vec{\varepsilon}$  の間に線形な幾何学的関係が成立すると仮定し、それをつぎのように表す。

$$\Delta \vec{\varepsilon} = [C] \Delta \vec{u} \quad (5)$$

ここに、 $[C]$  は微分オペレータマトリクスである。(4)式より(5)式はつぎのようになる。

$$\Delta \vec{\varepsilon} = [C] \Delta \vec{u} = [C][a] \Delta \vec{q} \quad (5')$$

(5')式は(2)式の関係を使ってつぎのように表す。

$$\begin{aligned} \Delta \vec{\varepsilon} &= [C_L][a] \Delta \vec{q} + [C_N][a] \Delta \vec{q} * [C_N][a] \Delta \vec{q} \\ &= [b] \Delta \vec{q} + [a_x'] \Delta \vec{q} * [a_x'] \Delta \vec{q}. \end{aligned} \quad (6)$$

ここに、 $[a_x'] = \partial[a]/\partial x$  である。 $*$  は各マトリクスの要素同士を掛けてマトリクスを作る演算子とする。[付録 A・4]

## 2.6 弾性法則

いま対象としている要素は線形な連続系であるとする。弾性法則より応力増分ベクトルはつぎのように表すことができる。

$$\Delta \vec{\sigma} = [E] \Delta \vec{\varepsilon}, \quad (7)$$

ここに、 $[E]$  は一般に応力とひずみを関係づける構成マトリクスである。(6)式より(7)式はつぎのように表すことができる。

$$\Delta \vec{\sigma} = [E]([b] \Delta \vec{q} + [a_x'] \Delta \vec{q} * [a_x'] \Delta \vec{q}). \quad (8)$$

## 2.7 ひずみエネルギー, 運動エネルギー

前述した諸量が成立する仮定の下で, 微小時間  $\Delta t$  間に応力が  $\bar{\sigma} \rightarrow \bar{\sigma} + \Delta \bar{\sigma}$ , 変位が  $\bar{u} \rightarrow \bar{u} + \Delta \bar{u}$  に変化することより, 弾性ひずみエネルギーと運動エネルギーはつぎのように表すことができる。

ひずみエネルギー:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_V \Delta \bar{\epsilon}^T (\bar{\sigma} + \Delta \bar{\sigma}) dV \\ &= \frac{1}{2} \int_V \Delta \bar{\epsilon}^T \bar{\sigma} dV + \frac{1}{2} \int_V \Delta \bar{\epsilon}^T \Delta \bar{\sigma} dV. \end{aligned} \quad (9)$$

(9)式の右辺の第一項は一般に不平衡力といわれる量に対応する。本報告では, 弾性挙動を考えているので, 各時間ステップにおける剛さの変化を考慮する必要がないので無視することができる。それゆえ, (9)式はつぎのようになる。

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_V \Delta \bar{\epsilon}^T \Delta \bar{\sigma} dV \\ &= \frac{1}{2} \int_V (\Delta \bar{\epsilon}_L + \Delta \bar{\epsilon}_N)^T [E] (\Delta \bar{\epsilon}_L + \Delta \bar{\epsilon}_N) dV \\ &= \frac{1}{2} \int_V \Delta \bar{\epsilon}_L^T [E] \Delta \bar{\epsilon}_L dV + \frac{1}{2} \int_V 2 \bar{\sigma}_x \Delta \bar{\epsilon}_N dV. \end{aligned} \quad (9')$$

(9')式を導くとき,  $\Delta \bar{\epsilon}_N$  の高次の項は無視しかつ  $\Delta \bar{\epsilon}_L^T [E] \Delta \bar{\epsilon}_N = \Delta \bar{\epsilon}_N^T [E] \Delta \bar{\epsilon}_L$  とした。また,  $\Delta \bar{\epsilon}_L^T [E] = \bar{\sigma}_x^T$  と置くとつぎのようになる。

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \Delta \bar{q}^T \left( \int_V [\mathbf{b}]^T [E] [\mathbf{b}] dV \right) \Delta \bar{q} \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_V (2 \bar{\sigma}_x^T [\mathbf{a}_x'] \Delta \bar{q} * [\mathbf{a}_x'] \Delta \bar{q}) dV. \end{aligned} \quad (10)$$

運動エネルギー:

$$\begin{aligned} T &= \int_V \Delta \dot{\bar{u}}^T \rho (\dot{\bar{u}} + \Delta \dot{\bar{u}}) dV \\ &= \frac{1}{2} \Delta \dot{\bar{q}}^T \left( \int_V [\mathbf{a}]^T \rho [\mathbf{a}] dV \right) \Delta \dot{\bar{q}} \\ &\quad + \frac{1}{2} \Delta \dot{\bar{q}}^T \left( \int_V [\mathbf{a}]^T \rho [\mathbf{a}] dV \right) \Delta \dot{\bar{q}}. \end{aligned} \quad (11)$$

上式において, ドットは時間微分を表わし,  $\rho$  は材料の単位長さ当りの密度を表わす。

## 2.8 節点外力のなす仕事

節点外力は, ひずみや変位の増分の仮定と同様に, 時間  $\Delta t$  間に  $\bar{Q} \rightarrow \bar{Q} + \Delta \bar{Q}$  変化すると仮定すると, 節点外力による仕事はつぎのように表すことができる。

$$W = \Delta \bar{q}^T (\bar{Q} + \Delta \bar{Q}). \quad (12)$$

## 2.9 増分形運動方程式

前述した(10), (11)式と(12)式に 仮想仕事の原理を適

用すると, つぎのような運動方程式を得る。

$$[m] \Delta \ddot{\bar{q}} + ([k_e] + [k_g]) \Delta \bar{q} = \bar{Q}_i + \Delta \bar{Q} - [m] \ddot{\bar{q}}_i. \quad (13)$$

(13)式は要素に関する動的平衡条件式である。 $[m]$ ,  $[k_e]$  と  $[k_g]$  はそれぞれ質量, 剛さと幾何学的剛さ特性である。〔付録 A・5〕実際の解析の場合は系全体に重ね合わせなければならない。いま, 系全体に重ね合わせた後  $i$  段階 ( $t_i$  時間) のときの動的平衡条件式をつぎのよう

$$[M] \Delta \ddot{\bar{q}} + ([K_e] + [K_g]) \Delta \bar{q} = \bar{Q}_i + \Delta \bar{Q} - [M] \ddot{\bar{q}}_i \quad (14)$$

## 2.10 運動方程式の逐次積分法

本報告では, Newmark の  $\beta$  法を微小時間間隔  $t_i \leq t \leq t_{i+1}$  で適用することを考える。

変位  $\bar{q}_i$  に対して,  $\bar{q}_{i+1}$  はテーラ級数よりつぎのように展開できる。

$$\bar{q}_{i+1} = \bar{q}_i + \Delta t \dot{\bar{q}}_i + \frac{1}{2!} (\Delta t)^2 \ddot{\bar{q}}_i + \frac{1}{3!} (\Delta t)^3 \ddot{\bar{q}}_i + \dots \quad (15)$$

いま, 加速度  $\ddot{\bar{q}}_i$  の変化が線形であると仮定すると,  $\ddot{\bar{q}}_i$  はつぎのように近似することができる。

$$\ddot{\bar{q}}_{i+1} = \frac{1}{(\Delta t)} \{\ddot{\bar{q}}_{i+1} - \ddot{\bar{q}}_i\} \quad (16)$$

(15)式中の係数  $1/6$  を  $\beta$  に置き換えて, (16)式の関係を使うと, つぎのような  $\beta$  法に関する基礎式を得ることができる。

$$\bar{q}_{i+1} = \bar{q}_i + \Delta t \dot{\bar{q}}_i + \beta (\Delta t)^2 \ddot{\bar{q}}_{i+1} + \left( \frac{1}{2} - \beta \right) (\Delta t)^2 \ddot{\bar{q}}_i \quad (17)$$

さらに, (15)式を時間で一回微分したときの係数  $1/2$  を  $\gamma$  と置いて, (16)式の関係を使うと速度  $\dot{\bar{q}}_{i+1}$  に関する近似式を得ることができる。

$$\dot{\bar{q}}_{i+1} = \dot{\bar{q}}_i + \gamma (\Delta t) \ddot{\bar{q}}_{i+1} + (1 - \gamma) \Delta t \ddot{\bar{q}}_i. \quad (18)$$

ここで, 時間  $t_{i+1}$  と  $t_i$  との各々の量の関係 (19) 式のように置き,

$$\left. \begin{aligned} \bar{q}_{i+1} &= \bar{q}_i + \Delta \bar{q}, \\ \dot{\bar{q}}_{i+1} &= \dot{\bar{q}}_i + \Delta \dot{\bar{q}}, \\ \ddot{\bar{q}}_{i+1} &= \ddot{\bar{q}}_i + \Delta \ddot{\bar{q}}, \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

を(17)式と(18)式に代入して,  $\Delta \ddot{\bar{q}}$  と  $\Delta \dot{\bar{q}}$  について解くと加速度と速度に関する増分をつぎのように表すことができる。

$$\left. \begin{aligned} \Delta \ddot{\bar{q}} &= \frac{1}{\beta (\Delta t)^2} \Delta \bar{q} - \frac{1}{\beta (\Delta t)} \dot{\bar{q}}_i - \frac{1}{2\beta} \ddot{\bar{q}}_i, \\ \Delta \dot{\bar{q}} &= \frac{\gamma}{\beta (\Delta t)} \Delta \bar{q} - \frac{\gamma}{\beta} \dot{\bar{q}}_i + \Delta t \left( 1 - \frac{\gamma}{2\beta} \right) \ddot{\bar{q}}_i. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

(20)式を(14)式に代入すると, つぎのような条件式となる。

$$[K^*] \Delta \bar{q} = [Q^*], \quad (21)$$

(21)式の各々の量はつぎのように表現できる。

$$\left. \begin{aligned} [K^*] &= \frac{1}{\beta(\Delta t)^2} [M] + [K_e] + [K_g], \\ [Q^*] &= \bar{Q}_i + \Delta \bar{Q} + [M] \left\{ \frac{1}{\beta(\Delta t)} \dot{\bar{q}}_i \right. \\ &\quad \left. + \left( 1 - \frac{1}{2\beta} \right) \ddot{\bar{q}}_i \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

さらに(19)式と(20)式より、時刻  $t_{i+1}$  における加速度、速度と変位の近似式はつぎのように表すことができる。

$$\left. \begin{aligned} \ddot{q}_{i+1} &= \frac{1}{\beta(\Delta t)^2} \Delta q - \frac{1}{\beta(\Delta t)} \dot{q}_i - \left( \frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{q}_i, \\ \dot{q}_{i+1} &= \frac{1}{\beta(\Delta t)} \Delta q + \left( 1 - \frac{\gamma}{\beta} \right) \dot{q}_i \\ &\quad + \Delta t \left( 1 - \frac{\gamma}{2\beta} \right) \ddot{q}_i, \\ \bar{q}_{i+1} &= \bar{q}_i + \Delta q. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

### 3. 数値計算例

計算例として、**Fig. 4** に示すような両端支持はりの中央に、正弦波 (**Fig. 3**) の衝撃荷重が作用したときの弾性挙動の解析を試みた。本報告では解析結果と比較するために文献(6)に示されている実験結果と比較を行った。

本解析に用いた諸量は文献(6)のそれと同様にした。それらはつぎのとおりである。

ヤング率  $E = 2.08 \times 10^4$  [kgf/mm<sup>2</sup>]

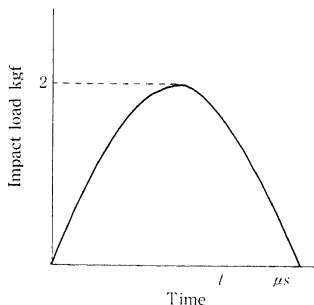
密度  $\rho = 7.78 \times 10^{-6}$  [kgf/mm<sup>3</sup>]

はりの形状 巾=10 [mm], 高さ 1 [mm]

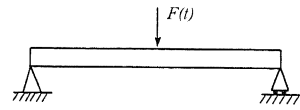
全長 200 [mm]

他に、逐次積分のパラメータの  $\beta$  は  $1/6$  とし、時間刻み  $\Delta t$  は  $0.75 \times 10^{-6}$  sec とした。

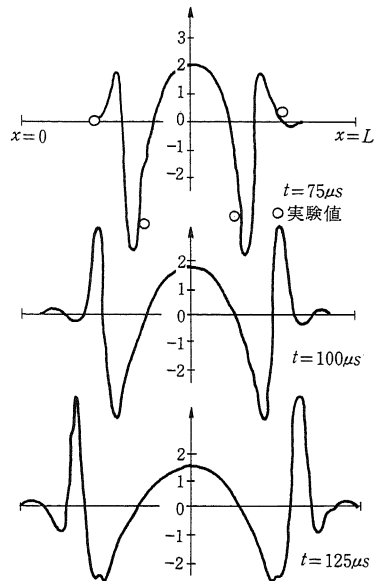
解析は、モーメントとせん断力を時間の流れで表したものである。その結果を **Fig. 5** と **Fig. 6** に示す。



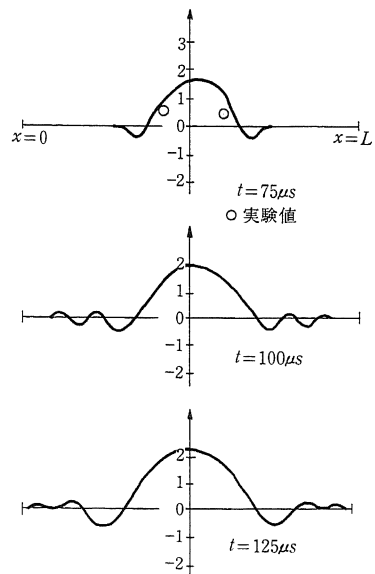
**Fig. 3** 正弦波パルス



**Fig. 4** 両端支持はり



**Fig. 5** せん断力の伝播



**Fig. 6** モーメントの伝播

#### 4. 結 論

本報告の計算は第2章で求めた各特性を応用し、その応用例を示したにとどまった。初期の衝撃波が伝播を示す波の変化には良い一致を示していることがわかる。

#### 5. おわりに

本報は昭和56年度卒業論文として行なわれた結果に基づいている。

#### 参 考 文 献

- 1) A. Okumura: Memoris of the shool of Science &

Engineering, Waseda Uni., 21-1, (1957)

- 2) 山田, 江澤: 生産研究, 28-12, (昭54-12), 521  
 3) 山田, 川井共訳: マトリクス構造解析の基礎理論, (昭49), 64  
 4) I. Sheinman: Int. J. Solids. Struct., 16, (1980), 1037.  
 5) Archer. J. S.: Proc. ASCE., 84 (ST6) paper 1814 (1978)  
 6) L. Busse, R. Barton: KONSTRUKTION, 24, (1972-1), 1.  
 7) 河島: コンピュータによる構造工学 II-4-A, (昭47), 培風館  
 8) Przeminiexi, J.S., AIAA, J., 11-1, (1973-1), 33.

#### 〔付録〕

##### A・1 変位関数:

$$\Delta \vec{u} = \begin{Bmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \xi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \xi & \xi^2 & \xi^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix} \quad (\because \xi = x/l)$$

##### A・2 境界条件:

$$\xi = 0 \text{ で } \Delta u = \Delta u_1, \quad \Delta v = \Delta v_1, \quad \Delta v' = \Delta \phi_1$$

$$\xi = 1 \text{ で } \Delta u = \Delta u_2, \quad \Delta v = \Delta v_2, \quad \Delta v' = \Delta \phi_2$$

##### A・3 形状関数:

$$[a] = \frac{1}{1+\Phi_s} \begin{bmatrix} 6(\xi-\xi^2)\eta & [-1+4\xi-3\xi^2-(1-\xi)\Phi_s]l\eta & 6(-\xi+\xi^2)l\eta & (2\xi-3\xi^2-\xi\Phi_s)l\eta \\ \xi-2\xi^2+\xi^3+(1-\xi)\Phi_s & [\xi-2\xi^2+\xi^3+\frac{1}{2}(\xi-\xi^2)\Phi_s]l & 3\xi^2-2\xi^3+\xi\Phi_s & [-\xi^2+\xi^3-\frac{1}{2}(\xi-\xi^2)\Phi_s]l \end{bmatrix}$$

( $\Phi_s$ : せん断パラメータ,  $\eta = y/l$ )

##### A・4 例えば3列同士の掛け算をつぎのように実行する。

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{bmatrix}$$

##### A・5 ◎質量マトリクス:

$$[m] = \frac{\rho A l}{(1+\Phi_s)^2} \left\{ \begin{array}{cc} \frac{13/35+7\Phi_s/10+\Phi_s^2/3}{(11/210+11\Phi_s/120+\Phi_s^2/24)l} & \frac{(1/105+\Phi_s/60+\Phi_s/120)l^2}{(13/420+2\Phi_s/40+\Phi_s^2/24)l} \\ \frac{9/70+3\Phi_s/10+\Phi_s/6}{-(13/420+3\Phi_s/40+\Phi_s/24)l} & \frac{(1/140+\Phi_s/60+\Phi_s^2/120)l^2}{-(1/140+\Phi_s/60+\Phi_s^2/120)l^2} \end{array} \right\}$$

SYM.

$$+ \frac{\rho A l}{(1+\Phi_s)^2} \left( \frac{i_z}{l} \right)^2 \left\{ \begin{array}{cc} \frac{6/5}{(1/10-\Phi_s/2)l} & \frac{(2/15+\Phi_s/6+\Phi_s^2/3)l^2}{-(1/10+\Phi_s/2)l} \\ -\frac{6/5}{(1/10-\Phi_s/2)l} & \frac{6/5}{-(1/10+\Phi_s/2)l} \end{array} \right\} \frac{(2/15+\Phi_s/6+\Phi_s^2/3)l^2}{(2/15+\Phi_s/6+\Phi_s^2/3)l^2}$$

SYM.

( $\because i_z^2 = I/A$ ; 回転半径)

◎剛さマトリクス：

$$[k_e] = \frac{EI}{l^3(1+\Phi_s)^2} \begin{pmatrix} 12 & & & \text{SYM.} \\ 6l & (4+\Phi_s)l^2 & & \\ -12 & -6l & 12 & \\ 6l & (2-\Phi_s)l^2 & -6l & (4+\Phi_s)l^2 \end{pmatrix}$$

◎幾何学的剛さマトリクス：

$$[k_g] = \frac{\sigma_x A}{(1+\Phi_s)l} \begin{pmatrix} 6/5+2\Phi_s+\Phi_s^2 & & & \text{SYM.} \\ -l/10 & (2/15+\Phi_s/12+\Phi_s^2/12)l^2 & & \\ -6/5-2\Phi_s-\Phi_s^2 & -l/10 & 6/5+2\Phi_s+\Phi_s^2 & \\ l/10 & -l^2/30 & -l/10 & (2/15+\Phi_s/12+\Phi_s^2/12)l \end{pmatrix}$$

(原稿受付 昭和57年 9 月17日)